**Université de Versailles - Saint Quentin** **Année 2018/2019**
**L3 Algèbre** **Maria Chlouveraki**

## Extensions simples, finies et algébriques - TD 9

**1.** Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[i]) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$.

**2.** Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{3}]) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

**3.** Soit $E/F$ et $a, b \in E$. Montrer que $F(a, b) = F(a)(b) = F(b)(a)$.

**4.** Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que $K$ est une extension simple de $F$. Montrer que $K$ est une extension simple de $E$.

**5.** Montrer que $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$.

**6.** Montrer que $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$.

**7.** Soit $E/F$. Montrer que nous avons $[E : F] = 1 \Leftrightarrow E = F$.

**8.** Soient $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ des corps, avec $n \geq 3$. Montrer que
$$[F_n : F_1] = \prod_{i=1}^{n-1} [F_{i+1} : F_i].$$

**9.** Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que $[K : F] = p$, où $p$ est un nombre premier. Dans ce cas, soit $K = E$ soit $E = F$. De plus, $K$ est une extension simple de $F$.

**10.** Soit $F$ un corps fini avec $|F| = q$, et soit $E/F$ avec $[E : F] = n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $E$ est un corps fini avec $|E| = q^n$.

**11.** Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de l'unité, montrer que $z$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

**12.** Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n}i$ sont des éléments algébriques sur $\mathbb{Q}$. Trouver leurs polynômes minimaux sur $\mathbb{Q}$.

**13.** Soit $z \in \mathbb{Q}(i)$. Montrer que $z$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et trouver son polynôme minimal.